



uebung_1_arith.docx: Zahlen

1. Seit dem 1. Februar 2014 ersetzt die IBAN (International Bank Account Number) die seither übliche Kontonummer. Sie setzt sich in Deutschland aus 22 Stellen zusammen: Zwei einleitende Buchstaben als Länderkennung (DE – Deutschland), zwei Prüzziffern, der seitherigen 8-stelligen Bankleitzahl (BLZ) und der 10-stelligen Kontonummer, die nötigenfalls linksseitig mit Nullen aufgefüllt wird:

DEpp bbbb bbbb kkkk kkkk kk

DE68 2105 0170 0012 3456 78

Um im Prüfverfahren die Gültigkeit einer IBAN festzustellen, wird die erste Vierergruppe ans Ende gestellt:

2105 0170 0012 3456 78DE 68

Dann werden die Buchstaben D und E in Zahlen umcodiert: D ist 13 und E ist 14 und alle nun vorhandenen Ziffern werden als 24-stellige Zahl gelesen:

210501700012345678131468

Diese 24-stellige Zahl wird durch 97 dividiert und zwar so, wie Kinder in der Grundschule dividieren. Dort kennt man ja noch keine Dezimalbrüche; die Division 19 geteilt durch 4 ergibt dort 4 Rest 3. Bei der Ganzzahldivision der IBAN ist nur der Rest interessant, der bei der Division durch 97 übrig bleibt.

Da viele Programme und Rechner nicht mit 24-stelligen Zahlen rechnen können, kann eine Hilfsmethode zur Restbestimmung verwendet werden, bei der die Zahlenfolge in Teile zu je 9 Stellen aufgeteilt wird:

- 1 Von den ersten 9 Stellen wird der Rest bei Division durch 97 bestimmt:

$$210501700 \bmod 97 = 60$$

- 2 An den erhaltenen Rest werden die Ziffern 10 bis 16 aus der Ausgangszahl angehängt und von dieser Zahl wieder der Rest bei Division durch 97 bestimmt:

$$600123456 \bmod 97 = 73$$

- 3 An den nun erhaltenen Rest werden die Ziffern 17 bis 23 angehängt und von dieser Zahl wieder der Rest bei Division durch 97 bestimmt:

- 4 $737813146 \bmod 97 = 9$

- 5 An diesen Rest wird endlich die 24. Ziffer angehängt und abermals der Rest bei Division durch 97 ermittelt:

$$98 \bmod 97 = 1$$

- 6 Dieser letzte Rest ist der Rest aus der Gesamtzahl.

- a) Stellen Sie Ihre eigene IBAN nach dem oben gezeigten Schema um und ermitteln Sie den Rest, den diese so erzeugte Zahl bei Division durch 97 lässt.
 - b) Untersuchen Sie auf die gleiche Weise weitere IBANs. Was fällt Ihnen auf?
2. Verwenden Sie alternativ Maxima, da dort 24-stellige Zahlen problemlos verarbeitet werden. In Maxima gibt es die Funktion $\text{mod}()$, welche eine Ganzzahldivision vornimmt und den Rest dieser Division als Ergebnis zurückliefert. Um den Rest der obigen Grundschulaufgabe in Maxima zu ermitteln, lautet der Aufruf:

```
(%i12) mod(19,4);  
(%o12) 3
```

- a) Stellen Sie Ihre eigene IBAN nach dem oben gezeigten Schema um und ermitteln Sie den Rest, den diese so erzeugte Zahl bei Division durch 97 lässt, mit Hilfe von Maxima.
- b) Untersuchen Sie mit Maxima weitere IBANs. Was fällt Ihnen auf?
- 3.** Eine IBAN laute DEXX 61450030 0000123456, wobei XX der Platzhalter für die Prüfzahl ist.
- a) Setzen Sie die Prüfzahl vorläufig auf 00 und stellen Sie diese IBAN nach dem oben in Aufgabe 1 gezeigten Schema um: DE durch 1314 ersetzen und ans Ende stellen. Ganz zum Schluss wird dann noch die (vorläufige) Prüfzahl 00 angehängt.
- b) Stellen Sie den Rest fest, den diese Zahl bei Division durch 97 lässt.
- c) Subtrahieren Sie den erhaltenen Rest von 98. Diese Differenz ist die korrekte Prüfzahl.
- d) Ersetzen Sie in der obigen IBAN XX durch die korrekte Prüfzahl und überprüfen Sie die so erzeugte IBAN durch Ermitteln des Rests bei Division durch 97.
- e) Erläutern Sie, warum dieses Verfahren zur Prüfzahlbestimmung funktioniert! Experimentieren Sie dazu mit Maxima, indem Sie die vorläufige Prüfziffer sukzessive um 1 erhöhen und jedes Mal den Rest bei Division durch 97 bestimmen lassen.
- 4.** Untersuchen Sie, wie sicher das Prüfzahlverfahren der IBAN ist. Begründen Sie jeweils Ihre Meinung!
- a) Wird die Falscheingabe eine Ziffer immer sicher erkannt?
- b) Wird die Falscheingabe von zwei beliebigen Ziffern immer sicher erkannt?
- c) Werden Zifferndreher immer sicher erkannt?
- 5.** Wenn man eine größere Menge Spielsteine („Hosenknöpfe“) auf den Tisch legt, kann man bei geschickter Anordnung ohne zu zählen sofort feststellen, ob die Anzahl gerade oder ungerade ist. Wie muss man die Knöpfe anordnen?
- 6.** Es gibt drei einfache Aussagen über gerade und ungerade Zahlen:
- 1) Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade.
 - 2) Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade.
 - 3) Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist ungerade.
- a) Weisen Sie die Gültigkeit jeder dieser Aussagen mit Hilfe von „figurierten Zahlen“ (also durch geschicktes Legen mit Spielsteinen) nach.
- b) Erstellen Sie jeweils parallel dazu einen Beweis auf der symbolischen¹ Ebene, also quasi als „Formel“. Überlegen Sie dazu zunächst, wie man eine gerade Zahl und wie man eine ungerade Zahl symbolisch darstellen kann.
- 7.** Malen Sie 49 größere Punkte großzügig verteilt auf ein DIN-A-4-Blatt.
- a) „Bündeln“ Sie die Punkte in 3er-Päckchen, indem Sie immer 3 Punkte mit einem Kringel umfahren. Wie viele Bündel können Sie erzeugen, wie viele einzelne Punkte bleiben übrig? Notieren Sie die Anzahl der übrig bleibenden Punkte.
- b) Bündeln Sie nun weiter die Dreierbündel immer zu Dreien indem Sie diese – vielleicht mit einer anderen Farbe – umkreisen. Wie viele Bündel erhalten Sie nun, wie viele Dreierbündel bleiben übrig? Notieren Sie die Anzahl der übrig bleibenden Bündel!

¹ *symbolisch* bedeutet: mit Hilfe von Zahlen, Ziffern, Rechenzeichen, Variablen, ...

- c) Fahren Sie weiter fort, indem Sie die erhaltenen Bündel des vorherigen Schritts immer zu dreien weiterbündeln und jeweils die Anzahl der übrigen bleibenden notieren. Wenn Sie keine weiteren Bündel mehr schnüren können, sind Sie fertig, notieren Sie sich aber auch in diesem Fall die Anzahl der zuletzt übrig bleibenden Bündel.
- d) Malen Sie die 49 Punkte auf ein weiteres Blatt. Gehen Sie dann genau so vor wie eben beschrieben, nur dass Sie immer Zweierbündel machen! Notieren Sie sich wieder die Reste!
- e) Nun malen Sie (in Gedanken) 3743 Punkte auf ein Papier. Bündeln Sie diese im Kopf in Zehnerbündel und notieren Sie jeweils die Reste. Überlegen Sie dann, was Sie mit diesen Bündelungen jeweils erzeugt haben!
- f) Überlegen Sie, was bei diesem Bündeln mathematisch passiert (wie erhalten Sie die Anzahl der Bündel, wie diejenige der Reste?) und führen Sie dann solche Bündelungsvorgänge rein auf der symbolischen (rechnerischen) Ebene durch. Bündeln Sie dazu 2436 Punkte in Fünferbündel.