



uebung_3_arith.docx: Primzahlen

1. Sie haben in der Vorlesung das „Sieb des Eratosthenes“ kennen gelernt, mit dem sich Primzahlen finden lassen. Bei diesem Verfahren ist die jeweils nächste, nicht gestrichene Zahl eine Primzahl, deren Vielfachen Sie streichen müssen.
Angenommen, Sie wollten alle Primzahlen bis 10.000 finden. Dann würden Sie alle Zahlen bis 10.000 aufschreiben, die 1 streichen, die 2 als Primzahl feststellen und ihre Vielfachen streichen. Die nächste, nicht gestrichene Zahl ist 3, deren Vielfachen Sie streichen, dann die 5 u.s.w.
Müssen Sie auf diese Art und Weise die ganze Zahlenliste durcharbeiten, um alle Primzahlen bis 10.000 zu finden oder können Sie vorher aufhören?
Falls Sie der Meinung sind, dass Sie vorher schon aufhören können: Bis zu welcher Zahl müssen Sie auf die angegebene Art und Weise vorgehen bis Sie sicher sein können, dass alle weiteren noch nicht gestrichenen Zahlen lauter Primzahlen sind?
Versuchen Sie, Ihre Erkenntnisse zuerst an einem Beispiel und dann allgemein zu formulieren!
2. Die *Teiler* einer Zahl a sind all diejenigen Zahlen, durch die sich a ohne Rest teilen lässt. Jede Zahl a hat mindestens 1 und a als sogenannte *triviale Teiler*. Die *Teilmengen* einer Zahl ist schließlich die Menge aller Teiler der Zahl. Die Teilmengen von 18 ist beispielsweise
$$T(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$
 - a) Bestimmen Sie die Teilmengen von 16, 27 und 125. Notieren Sie außerdem die Primfaktorzerlegungen dieser Zahlen.
 - b) Notieren Sie nun auch die Primfaktorzerlegungen der Teiler der drei Zahlen. Was fällt Ihnen auf?
 - c) Ahnen Sie bereits einen Zusammenhang zwischen der Primfaktorzerlegung (PFZ) und der Anzahl der Teiler dieser Zahlen?
 - d) Bestimmen Sie die Teilmengen und die PFZ der Zahl 72 sowie aller ihrer Teiler. Können Sie auch hier die PFZ und die Teileranzahl zueinander in Beziehung setzen?
 - e) Führen Sie Ihre Überlegungen an den Zahlen 90 und 210 fort.
 - f) Formulieren Sie abschließend eine Regel, anhand der man aus der Primfaktorzerlegung einer Zahl auf die Anzahl deren Teiler schließen kann.
3. Lösen Sie mit dem in der vorherigen Aufgabenstellung gefundenen Satz die folgenden Aufgaben und begründen Sie Ihre Antworten:
 - a) Nennen Sie verschiedene Zahlen, die genau 18 Teiler haben.
 - b) Nennen Sie verschiedene Zahlen, die genau 17 Teiler haben.
 - c) Nennen Sie verschiedene Zahlen, die genau 9 Teiler haben.
 - d) Was haben die Zahlen aus b) und c) und alle weiteren Zahlen mit einer ungeraden Teileranzahl gemeinsam? Warum ist das so?
4. In einem fernen Land gibt es ein Gefängnis mit 2000 Zellen und 2000 Wärtern. Die Zellen und die Wärter sind von 1 bis 2000 durchnummeriert. Die Schlösser an den Zellentüren funktionieren folgendermaßen: Nach einmaligem Umdrehen des Schlüssels ist die zuvor verschlossene Tür geöffnet, nach abermaligem Drehen ist sie wieder ver-

geschlossen. Nach dreimaligem Drehen ist sie wieder offen, nach viermaligem Drehen wieder verschlossen usw.

Jedes Jahr, am Geburtstag des Landesfürsten, werden einige Häftlinge nach folgendem Schema freigelassen: Der Wärter mit der Nummer 1 dreht an jeder Zellentür seinen Schlüssel einmal herum; damit sind alle Zellen offen. Der zweite Wärter beginnt bei Zelle Nummer 2 und dreht seinen Schlüssel in jeder zweiten Tür einmal herum; er schließt damit alle geradzahigen Zellen wieder zu. Wärter 3 beginnt bei Zelle 3 und dreht seinen Schlüssel in jeder 3. Tür, Wärter 4 beginnt bei Zelle 4 und dreht seinen Schlüssel in jeder 4. Tür... Auf diese Weise wird nacheinander jeder der 2000 Wärter durch das Gefängnis geschickt, bis der zweitausendste Wärter seinen Schlüssel einmal in der Tür von Zelle 2000 gedreht hat. Jeder Gefangene, der nun eine offene Zellentür vorfindet, darf das Gefängnis als freier Mann verlassen.

In welche Zellen würden Sie sich verlegen lassen, um beim nächsten Geburtstag des Fürsten unter den Freigelassenen zu sein?

5. Nachdem irgendwann einmal alle Gefangenen den „Trick“ kannten, lässt sich der Landesfürst eine andere Amnestie einfallen: Statt den Schlüssel im Schloss zu drehen, sollen die Wärter an ihren jeweiligen Türen nur ein Kreuz machen. Es werden anschließend alle Gefangenen frei gelassen, an deren Tür genau zwei Kreuze sind. In welche Zellen würden Sie sich nun verlegen lassen?
6. Sie haben die verschlüsselte Botschaft [261, 10, 278, 249, 43, 101, 53, 150, 165, 249, 103, 101] erhalten.
 - a) Entschlüsseln Sie diese mit Ihrem „private key“ d:91, N:323.
 - b) Verschlüsseln Sie die Nachricht Semesterbeginn mit dem „public key“ e:5, N:247
7. Suchen Sie sich eine/n Kommunikationspartner/in und verteilen Sie die Rollen *Sender* und *Empfänger*.
 - a) Als *Empfänger* laden Sie die Datei `rsa_key.wxm` in Maxima und lassen dort über den Menübefehl ZELLEN / ALLE ZELLEN NEU AUSWERTEN alle enthaltenen Kommandos ausführen. Dann gehen Sie zum Abschnitt 2 (Durchführung) und tragen dort als Aufrufparameter für die Funktion `make_public()` zwei andere Primzahlen ein. Rufen Sie diese und die weiteren Funktionen in den Abschnitten 2.1 und 2.2 nacheinander erneut auf (Großschreibttaste-Eingabetaste). Den erzeugten *public key* geben Sie an Ihre/n Kommunikationspartner/in.
Wenn Sie von dort eine codierte Nachricht erhalten, dann ersetzen Sie in Absatz 2.3 die dort eingetragene Liste durch die erhaltene Liste. Lassen Sie diese Zeile und die beiden folgenden erneut ausführen, bis Sie letztendlich die entschlüsselte Botschaft im Klartext lesen können.
 - b) Als *Sender* laden Sie die Datei `rsa_krypt.wxm` in Maxima und lassen dort über den Menübefehl ZELLEN / ALLE ZELLEN NEU AUSWERTEN alle enthaltenen Kommandos ausführen. Dann gehen Sie zum Abschnitt 2 (Durchführung) und tragen dort zunächst den erhaltenen *public key* ein. In Abschnitt 2.2 ersetzen Sie „Hallo Welt“ durch eine eigene Botschaft und verschlüsseln diese in Abschnitt 2.3. Nicht vergessen, jede Zeile durch Großschreibttaste-Eingabetaste neu von Maxima ausführen zu lassen! Übermitteln Sie schließlich die codierte Nachricht Ihrer Kommunikationspartnerin.
 - c) Tauschen Sie Ihre Rollen!
8. Ermitteln Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$\frac{2x+1}{x-4} + \frac{3x-1}{x+4} = \frac{4x^2-7x+36}{x^2-16}$$